Teoria dei giochi

Cos'è la teoria dei giochi

La teoria dei giochi è un insieme di strumenti analitici utilizzati per comprendere i comportamenti di decision-makers che interagiscono tra di loro.

La teoria dei giochi fonda la propria analisi su alcune assunzioni base. Assunzione fondamentale è che i decision-makers hanno degli obiettivi esogeni ben definiti (sono razionali) e li perseguono considerando tutte le informazioni a loro disposizione, comprese le aspettative sul comportamento degli agli agenti con cui interagiscono (ragionano in modo strategico).

Informazione		Tipologia del gioco: Simultaneo	Tipologia del gioco: Sequenziale
	Completa	Nash	Sub-game Perfect Nash Equilibrium
	Incompleta	Bayesian Nash	Perfect Bayesian Equilibrium

Giochi Simultanei con Informazione Completa

Nella rappresentazione di un gioco in forma normale ciascun giocatore sceglie la propria strategia in modo simutaneo. In base alle combinazioni delle strategie con gli altri giocatori, si determinano i payoff di ciascun giocatore.

Nella rappresentazione di un gioco in forma normale sono specificati:

- I giocatori
- L'insieme delle strategie per ciascun giocatore
- Per ciascun giocatore, il payoff corrispondente per ogni possibile combinazione di strategie con gli altri giocatori.

Definizione di un gioco:

$$G=\{S1, \dots, Sn; u1, \dots, un\}$$

Dove $S_{1\dots}$ S_n sono gli insiemi di strategie per gli n giocatori, $u_{1\dots}$ u_n i payoff degli n giocatori.

Come risolvere un gioco attraverso l’eliminazione iterata delle strategie dominate

Si dice che, per un certo giocatore, una strategia è strettamente dominata se ne esiste un'altra che assicura al giocatore in esame un payoff più elevato, qualunque sia la strategia adottata dagli altri giocatori.

Più formalmente:

Siano s_i' and s_i'' due strategie per il giocatore i (quindi appartenenti all’insieme S_i). La strategia s_i' è strettamente domanita dalla strategia s_i'' se, per ogni possibile combinazione con le strategie degli altri giocatori, il payoff di i nel giocare s_i' è strettamente minore del payoff di i nel giocare s_i''.

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \ldots, s_n)$$

Il metodo dell’eliminazione iterata delle strategie dominate consiste nell’eliminare progressivamente righe e colonne corrispondenti alle strategie che risultano dominate in modo da restringere via via il gioco.

Giocatore 2

		Sinistra	Centro	Destra
Giocatore 1	Su	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	Giù	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Giocatore 2

		Sinistra	Centro	Destra
Giocatore 1	Su	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	Giù	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Giocatore 2

Giocatore 1		Sinistra	Centro	Destra
	Su	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	Giù	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Giocatore 2

Giocatore 1		Sinistra	Centro	Destra
	Su	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	Giù	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Giocatore 2

Giocatore 1		Sinistra	Centro	Destra
	Su	1 , 0	1 , 2	0 , 1
	Giù	0 , 3	0 , 1	2 , 0

Nash Equilibrium

Le strategie (s_1^*, ..., s_n^*) sono un Nash Equilibrium (NE) se, per ogni giocatore i, s_i^* è la best response rispetto alle strategie degli altri n-1 giocatori (s_1^*, ..., s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, ..., s_n^*):

$$u_i\,(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i\,(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

Per ogni possibile strategia s_i in S_i; ovvero, una s_i^* per cui:

$$\text{Max } u_i\,(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$$

		Giocatore 2: C	Giocatore 2: D
Giocatore 1	A	-1 , -1	-9 , 0
	B	0 , -9	-6 , -6

In questo gioco i payoff in rosso sono relativi alle best response di ciascun giocatore. Per il giocatore 1 la strategia B è una best response rispetto a C, così come B è una best response rispetto a D (nota che A è una strategia dominata). Per il giocatore 2 la strategia D è una best response rispetto ad A, così come D è una best response rispetto a B (C è una strategia dominata). Allora (B, D) è un NE, ovvero una coppia di strategie in cui ciascuno dei due giocatori gioca la propria best response.

Questo tipo di equilibrio viene chiamato "Nash equilibrium in strategie pure" (PSNE).

Nash Equilibrium in Strategie Miste (MSNE)

Nash Equilibrium

Matching Pennies

NE??

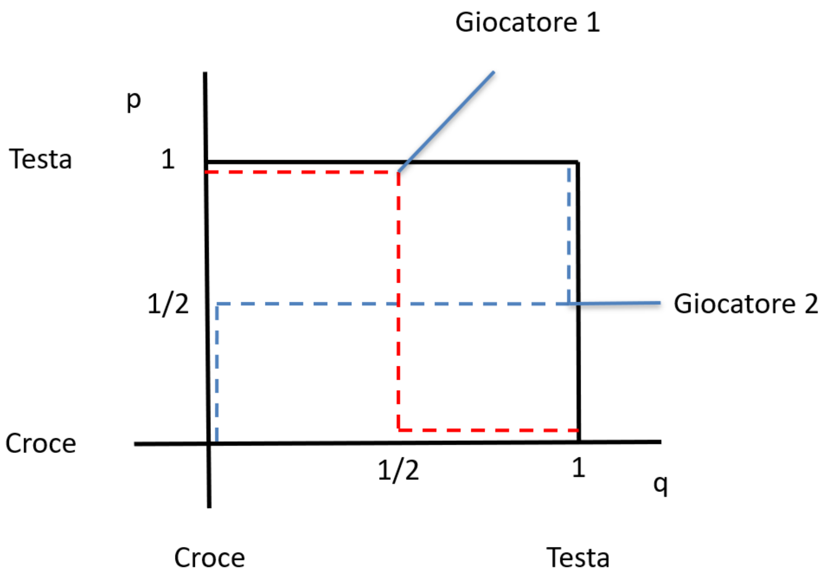
		Giocatore 2: Testa	Giocatore 2: Croce
Giocatore 1	Testa	-1 , 1	1 , -1
	Croce	1 , -1	-1 , 1

In un gioco in forma normale $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, si consideri $S_i = \{s_1, \ldots, s_K\}$. Allora una strategia mista per il giocatore i è una distribuzione di probabilità $p_i = (p_1, \ldots, p_K)$, dove $0 \leq p_i \leq 1$ per $i = 1, \ldots, K$ e $p_1 + \ldots + p_K = 1$.

Le strategie $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ sono NE se, per ogni giocatore i, p_i^* è la best response per il giocatore i rispetto alle strategie degli altri n-1 giocatori $(p_1^*, \ldots, p_{i-1}^*, p_{i+1}^*, \ldots, p_n^*)$.

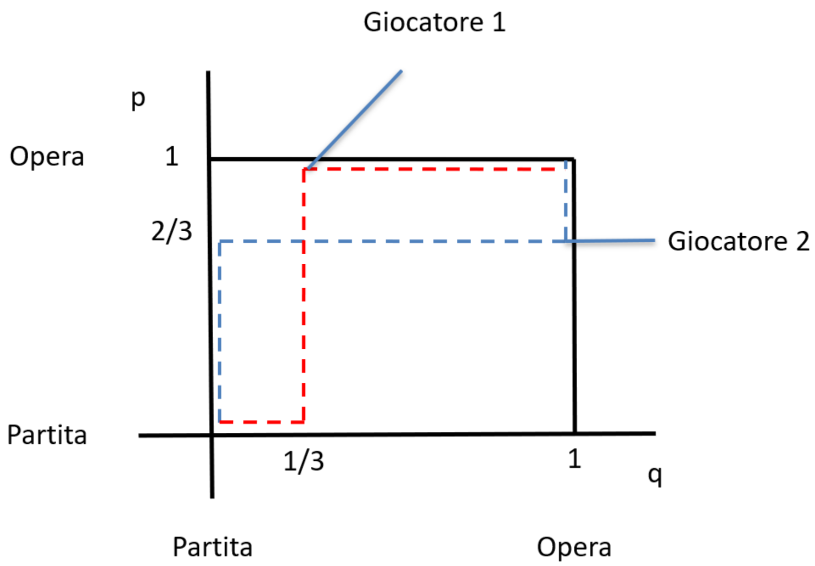
Nel gioco “Matching Pennies” non esiste un PSNE, ovvero dove ciascun giocatore gioca una strategia che è la propria best response. La soluzione del gioco prevede incertezza circa cosa l’altro giocatore deciderà fare.

Le strategie miste possono essere interpretate in termini di incertezza per un giocatore rispetto a cosa gli altri giocatori decideranno fare (Harsanyi, 1973).



•C’è un unico NE in strategie miste (1/2;1/2), rappresentato dal punto in cui le best response intersecano

Battaglia dei sessi



•Esistono tre NE, due in strategie pure e una in strategie miste (2/3;1/3)

Esistenza di un Nash Equilibrium

Teorema: In un gioco in forma normale $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, se n è finito e S_i è finito per ogni i, allora esiste almeno un NE (in strategie pure o miste).

Giochi Sequenziali con Informazione Completa

In questa sezione saranno trattati i giochi in cui i giocatori scelgono le loro strategie non più in modo simultaneo, ma sequenziale.

Un semplice gioco sequenziale può essere strutturato nel modo seguente:

1. Il giocatore 1 sceglie un'azione a_1 dall'insieme delle strategie possibili A_1.
2. Il giocatore 2 osserva a_1 e sceglie un'azione dall'insieme delle strategie possibili A_2.
3. I payoff che ne derivano saranno: $u_1(a_1, a_2)$ e $u_2(a_1, a_2)$

Molti modelli economici sono strutturati seguendo questa impostazione, come ad esempio il modello di Stackelberg.

Questa classe di modelli si risolve per backward induction, ovvero ricavandone l'equilibrio considerando in prima analisi l'ultimo stadio per poi risalire fino al primo.

Nel gioco generalizzato presentato, l'ultimo stadio è caratterizzato dalla scelta del giocatore 2 che affronta il seguente problema di massimizzazione:

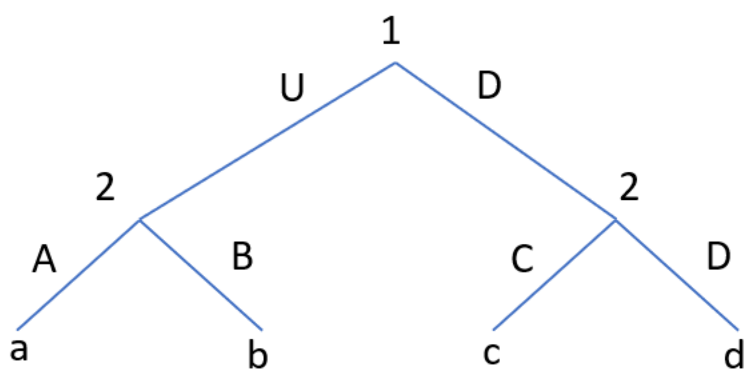
$$\text{Max } u_2(a_1, a_2)$$

Assumendo che questo problema ha un'unica soluzione, il giocatore 1 considererà nel proprio processo di scelta $R_2(a_1)$, ossia le scelte ottimali del giocatore 2 in risposta alla propria scelta a_1. In questo modo la scelta del giocatore 1 è dettata dal seguente problema di massimizzazione:

$$\text{Max } u_1(a_1, R_2(a_1))$$

Rappresentazione dei giochi sequenziali

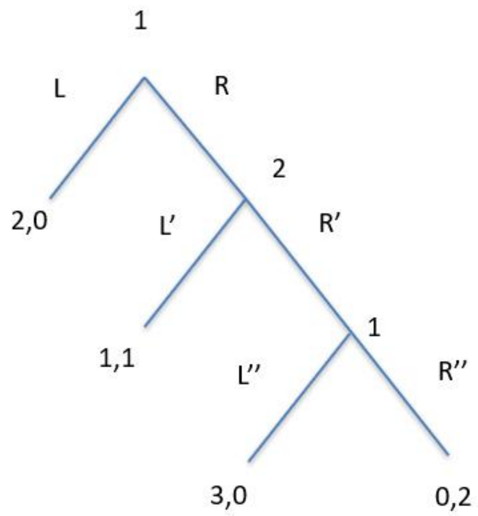
Nella sezione precedente abbiamo utilizzato per i giochi simultanei la rappresentazione in forma normale. Per i giochi sequenziali la rappresentazione più conveniente è quella in forma estesaG come nell'immagine sottostante.



In una rappresentazione in forma estesa di un gioco sequenziale sono specificati:

- I nodi: ovvero i punti in cui i giocatori prendono le loro scelte (1,2)
- Gli archi: le strategie dei giocatori (U e D per il giocatore 1; A, B, C, D per il giocatore 2)
- I payoff (a, b, c, d rappresentano i possibili payoff dei due giocatori)

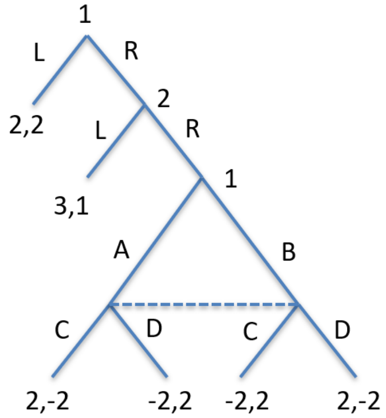
<u>Esempio</u>



Procedendo per backward induction, iniziamo l’analisi del terzo stadio del gioco (ovvero la seconda mossa del giocatore 1). Qui il giocatore 1 deve scegliere tra L’’ e R’’, con L’’ che gli garantisce un payoff di 3 e R’’ invece 0, quindi L sarà la scelta ottimale. Al secondo stadio il giocatore 2 anticipa la mossa al terzo stadio del giocatore 1, che gli porterebbe un payoff di 0. In questo stadio allora il giocatore 2 può scegliere tra L’ che gli garantirebbe un payoff di 1 e R’ che invece gli darebbe 0, per cui L’ è la scelta ottima. Infine al primo stadio il giocatore 1 dovrà scegliere tra L che gli offre un payoff di 2 e R con un payoff di 1. La scelta ottimale è quindi L.

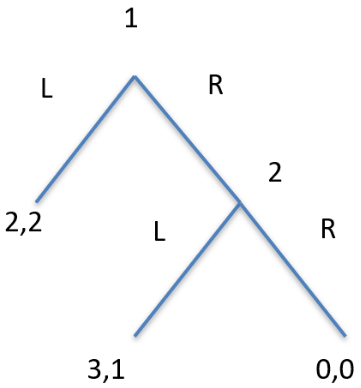
<u>Sub-game Perfection</u>

Un sottogioco G di un gioco in forma estesa T consiste in un singolo nodo e tutti i suoi successori in T, con la seguente proprietà che se x’∈G e x’’∈h(x’) allora x’’∈G.



- Non si può applicare il metodo backward induction (informazione imperfetta)
- Tuttavia il sottogioco finale ha un unico NE con payoff attesi (0,0)

Un profilo di strategie σ di un gioco in forma estesa è un Sub-game Perfect Nash Equilibrium se la restrinzione di σ in G (un sub-game) è un NE di G per ogni G.



- La logica del sub-game perfection è di rimpiazzare ogni sub-game con I relativi payoff del NE, per poi procedure per backward induction sull'albero ridotto del gioco
- Pertanto questo albero è equivalente a quello precedente

Giochi con Informazione Incompleta

Nei giochi a informazione incompleta almeno un giocatore è incerto circa la funzione dei payoff dell'altro giocatore.

Un tipico esempio di gioco simultaneo a informazione incompleta è l'asta con offerta in busta chiusa: ogni giocatore conosce la propria valutane del bene oggetto dell'asta, ma non conosce la valutazione degli altri partecipanti. In questa tipologia di giochi l'obietttivo è quello di individuare il Bayesian-Nash equilibrium, ovvero l'equilibrio di Nash in cui le strategie, che sono sempre delle risposte ottime, sono tali da prevedere la mossa da adottare in funzione di ciascun tipo possibile di giocatore.

Nei giochi a informazione completa è cruciale il ruolo dei belief, ovvero la valutazione effettuata da ciascun giocatore in merito alla tipogia di rivale con cui ci si trova ad interagire. Si modella assegnando una probabilità al nodo decisionale in cui il giocatore deve muovere. Il belief deve essere coerente, ossia deve tener conto di tutte le informazioni disponibili all'interno del gioco e delle mosse effettuate dai giocatori sulla base di tali credenze. Il belief viene calcolato, quando possibile, sulla base della regola di Bayes.

Il Bayesian perfect equilibrium è il sistema di belief e di strategie coerenti con i relativi belief che formano un equilibrio. E' un raffinamento dell'equilibrio di Nash da applicare ai giochi dinamici con informazione incompleta.